

MATEMATYKA

KLASA I LO G

TEMAT: Pole figury geometrycznej

Pole figury płaskiej jest to funkcja, która każdej figurze geometrycznej płaskiej przyporządkowuje liczbę nieujemną w taki sposób, że spełnione są warunki:

- pola figur przystających są równe,
- jeżeli figury nie mają punktów wspólnych, to pole figury stanowiących ich sumę jest sumą pól figur składowych.

Nie dla każdej figury pole musi istnieć.

Pole figury wyrażamy w **jednostkach pola**. Za jednostkę pola będziemy przyjmować pole kwadratu o boku długości równej przyjętej jednostce długości. Jeżeli \bar{u} jest jednostkową długością, to \bar{u}^2 stanowi jednostkę pola. Czyli jeżeli za jednostkę długości przyjmujemy liczbę 1 cm, to pole kwadratu o boku długości 1 cm będzie jednostką pola figury o oznaczymy ją jako 1cm^2 .

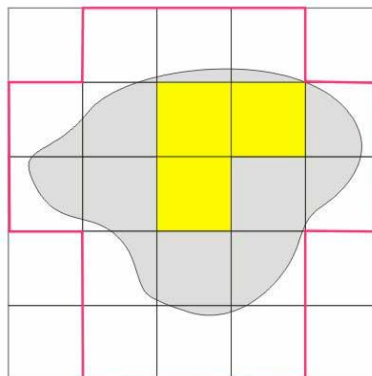
Powyzsze określenie dotyczy ogólnego pojęcia pola figury. Przejdziemy teraz do miary polowej figury płaskiej (pola figury płaskiej)

Dana jest ograniczona figura płaska f . Nakładamy na nią sieć kwadratów o odstępnie \bar{u} i wyznaczamy:

- liczbę w_0 kwadratów tej sieci zawartych w tej figurze,
- liczbę z_0 kwadratów pokrywających tę figurę (mających co najmniej jeden punkt wewnętrzny lub brzegowy tej figury).

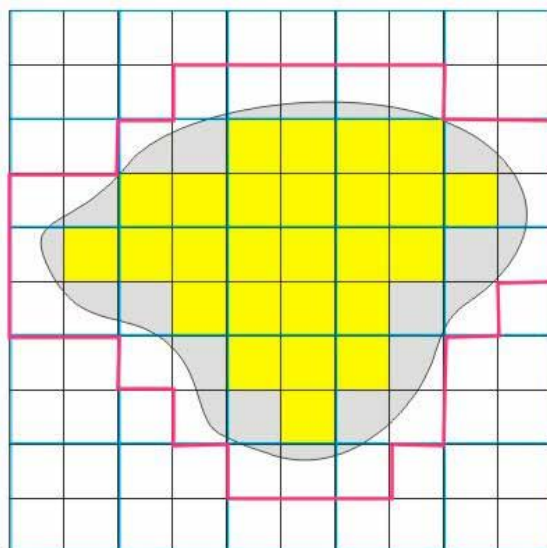
Liczby te nazywamy przybliżeniem dolnym i przybliżeniem górnym pola figury.

Ilustruje to poniższy rysunek:



Mamy tutaj więc $w_0=3$ (żółte pola) i $z_0=19$ (pola otoczone czerwoną linią). Zatem zawsze $w_0 < z_0$. Dolnym przybliżeniem pola jest liczba 3, natomiast górnym przybliżeniem pola jest liczba 19. Można powiedzieć, że pole naszej figury jest liczbą z przedziału od 3 do 19. To

dość kiepskie przybliżenie. Teraz na naszą sieć wyjściową nałożymy sieć o mniejszym odstępnie (każdy kwadrat sieci podzielimy na cztery części).



Teraz wyznaczamy liczbę w_1 , która wyraża w tych samych jednostkach \bar{u}^2 łączne pole kwadratów sieci zawartych w danej figurze (żółte pola) oraz liczbę z_1 , która wyraża w tych samych jednostkach \bar{u}^2 łączne pole kwadratów sieci pokrywających figurę (kwadraty zaznaczone czerwoną obwódką). Czyli w naszym przypadku mamy 26 żółtych kwadratów, co daje liczbę $w_1=6,5$ (26 małych kwadratów składa się na pole 6,5 większych kwadratów). Liczba $z_1=14$ (56 małych kwadratów daje 14 pola dużego - jednostkowego kwadratu). Mamy więc kolejne przybliżenie pola. Teraz możemy powiedzieć, że pole naszej figury jest liczbą z przedziału od 6,5 do 14. Możemy też zapisać, że $w_0 \leq w_1 < z_1 \leq z_0$

W ten sposób możemy nakładać kolejne siatki na figurę otrzymując ciągi liczb $w_0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n < z_n \leq \dots \leq z_1 \leq z_0$. Ciągi te są monotoniczne i ograniczone, więc są zbieżne (posiadają granice):

$$\lim w_n = w(f)$$

$$\lim z_n = z(f)$$

Liczby te nazywamy następująco:

$w(f)$ - wewnętrzna miara pola figury f ,

$z(f)$ - zewnętrzna miara pola figury f ,

przy czym $w(f) \leq z(f)$

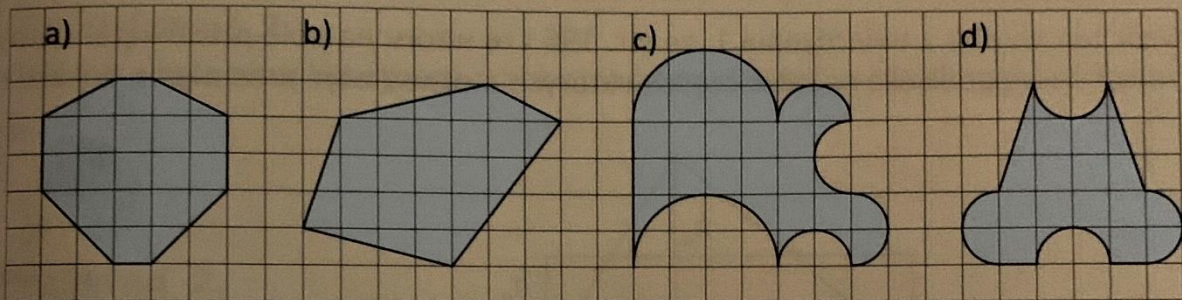
Jeśli obie te miary (wewnętrzna i zewnętrzna) są równe i nie zależą od wyboru sieci i sposobu zagęszczania, to tę wspólną wartość nazywamy **polem figury**.

Oto kilka istotnych własności pola:

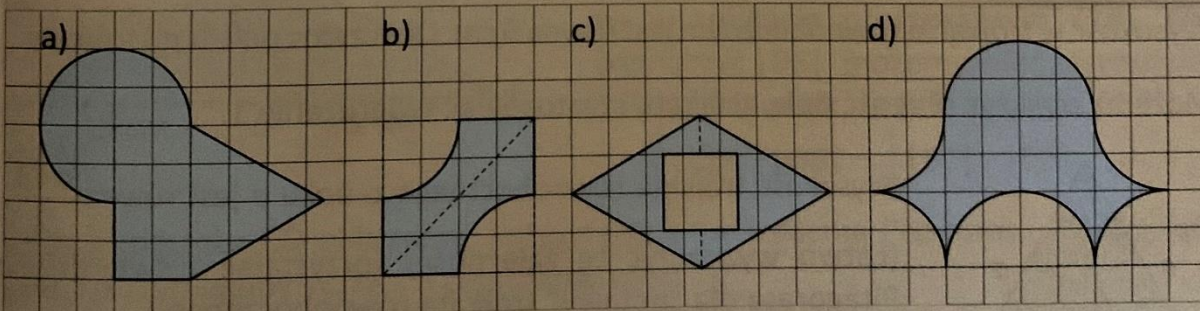
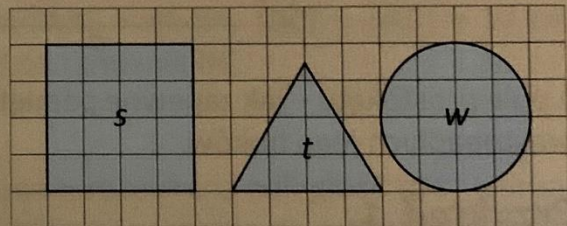
- pole figury nie zależy od sieci wyjściowej,
- każda figura zawarta w odcinku ma pole równe 0,
- każda łamana ma pole 0,
- każdy łuk okręgu ma pole 0,
- jeśli brzeg figury ma pole 0, to figura f ma pole $m(f)$,
- każda figura ograniczona, której brzeg składa się ze skończonej liczby odcinków lub łuków ma pole,
- pole **wielokąta** można obliczyć dzieląc go na **trójkąty** i dodając do siebie pola tych trójkątów.

Zadania

1. Pole jednej kratki jest równe 1. Oblicz pola poniższych figur.



2. Na rysunku obok dane są trzy figury: kwadrat, trójkąt równoboczny i koło, których pola są odpowiednio równe: s , t , w . Wyraż pole figur umieszczonych poniżej za pomocą pól s , t , w .



3. Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 12 cm. Punkty K , L , M , N należą odpowiednio do boków AB , BC , CD , AD . Wiedząc, że $|AK| : |KB| = 1 : 2$, $|BL| : |LC| = 1 : 5$, $|DM| : |MC| = 7 : 5$ oraz $|DN| = |AN|$, oblicz pole czworokąta $KLMN$.