MATEMATYKA

KLASA I LO G

TEMAT: Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi

Czyli korzystamy z podstawowych tożsamości trygonometrycznych

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \text{(jedynka trygonometyczna)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

oraz z wybranych wzorów redukcyjnych

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ-\alpha) &= \cos\alpha & \sin(180^\circ-\alpha) &= \sin\alpha \\ \cos(90^\circ-\alpha) &= \sin\alpha & \cos(180^\circ-\alpha) &= -\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ-\alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha & \operatorname{tg}(180^\circ-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha) &= \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha \end{aligned}$$

Przykłady:

Oblicz $\sin 120°$, $\cos 135°$, $\operatorname{tg} 150°$.

Rozwiązanie:

Korzystam ze wzorów: $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ i wartości funkcji trygonometrycznych.

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 150° = \operatorname{tg}(180° - 30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Odp. $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Oblicz $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

Rozwiązanie:

Korzystam ze wzoru $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)\cdot\frac{1}{\cos\alpha}}{(\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot\frac{1}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

Odp. $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{1}{3}$

Oblicz $\dfrac{\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ - 1}{\sin 21^\circ + \cos 43^\circ}$.

Rozwiązanie:

Korzystam ze wzoru $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ i z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ - 1}{\sin 21^\circ + \cos 43^\circ} &= \frac{\sin^2 40^\circ + [\sin(90^\circ - 40^\circ)]^2 - 1}{\sin 21^\circ + \cos 43^\circ} = \\
&= \frac{\sin^2 40^\circ + [\cos 40^\circ]^2 - 1}{\sin 21^\circ + \cos 43^\circ} = \\
&= \frac{\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ - 1}{\sin 21^\circ + \cos 43^\circ} = \\
&= \frac{1 - 1}{\sin 21^\circ + \cos 43^\circ} = \\
&= \frac{0}{\sin 21^\circ + \cos 43^\circ} = 0
\end{aligned}$$

ZADANIA:

- Oblicz $\sin 135^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\operatorname{tg} 120^\circ$.
- Oblicz $\dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \sin 15^\circ}$.
- Oblicz $\dfrac{\sin 19^\circ + \sin 31^\circ}{\sin 19^\circ + \cos 59^\circ}$.