

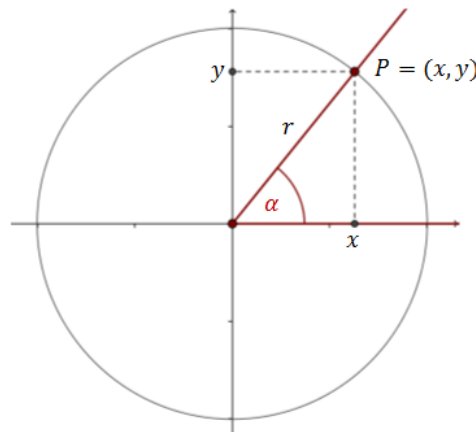
MATEMATYKA

KLASA I LO G

TEMAT: Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta wypukłego

Umiemy już definiować funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym (dla kątów ostrych). Teraz zobaczymy jak można uogólnić tę definicję dla kąta wypukłego.

Narysujmy w układzie współrzędnych dowolny okrąg o promieniu r i zaznaczmy w nim kąt środkowy α . Ramię kąta α wyznacza na okręgu punkt $P=(x,y)$.



Teraz możemy podać ogólnie **definicje funkcji trygonometrycznych:**

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

Słownie powyższe definicje można zapisać tak:

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej punktu P do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

Tangensem kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odciętej tego punktu (pod warunkiem, że odcięta jest różna od zera).

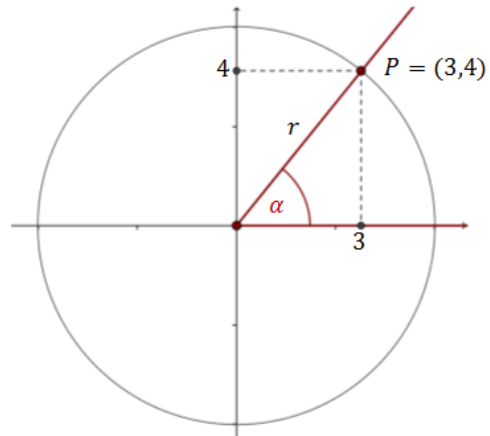
Cotangensem kąta α nazywamy stosunek odciętej punktu P do rzędnej tego punktu (pod warunkiem, że rzędna jest różna od zera).

Przykład 1.

Załóżmy, że na ramieniu kąta α możemy zaznaczyć punkt $P=(3,4)$. Jakie będą wówczas wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta?

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek do zadania:



Obliczamy długość promienia okręgu:

$$r^2 = 3^2 + 4^2$$

$$r^2 = 9 + 16$$

$$r^2 = 25$$

$$r = 5$$

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

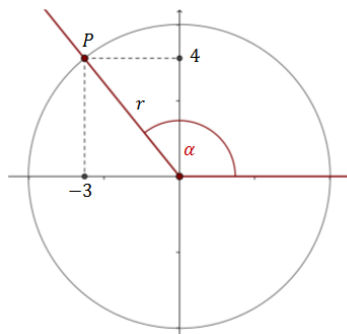
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Przykład 2.

Założmy, że na ramieniu kąta α możemy zaznaczyć punkt $P=(-3,4)$. Jakie będą wówczas wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta?

Rozwiązanie: Wykonujemy rysunek do zadania:



Obliczamy długość promienia okręgu:

$$r^2 = (-3)^2 + 4^2$$

$$r^2 = 9 + 16$$

$$r^2 = 25$$

$$r = 5$$

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

Jak widać na powyższych przykładach funkcje trygonometryczne mogą przyjmować również wartości ujemne.

W zależności od ćwiartki układu współrzędnych można przypisać każdej funkcji trygonometrycznej konkretny znak.

***W pierwszej ćwiartce wszystkie są dodatnie,
w drugiej tylko sinus***

Przykład 5.

Pamiętając powyższy wierszyk od razu możemy ustalić znak dowolnej funkcji trygonometrycznej. Przykładowo:

1. $\sin 150^\circ$ jest dodatni, ponieważ kąt 150° leży w drugiej ćwiartce.
2. wartości funkcji $\cos 150^\circ$, $\operatorname{tg} 150^\circ$, $\operatorname{ctg} 150^\circ$ są ujemne, ponieważ kąt 150° leży w drugiej ćwiartce.

ZADANIA:

1. Kąt α znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt P należy do drugiego ramienia tego kąta. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeśli :
 - a) $P(-3,4)$
 - b) $P(3,\sqrt{3})$
 - c) $P(-12,5)$
 - d) $P(2,6)$
2. Wyznacz , korzystając z definicji wartości funkcji trygonometrycznych kąta 150°