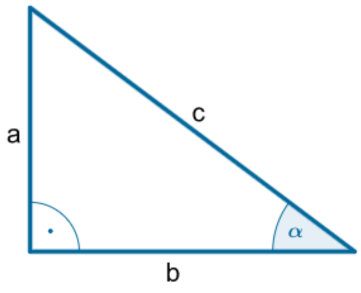
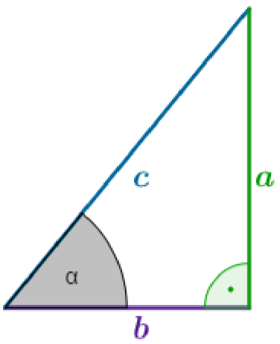
Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Definicja: Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Załóżmy, że w trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α. Wprowadzimy nazwy stosunków długości boków tego trójkąta.



- Sinusem kąta ostrego α (w skrócie sinα) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnej.
- Cosinusem kąta ostrego α (w skrócie cosα) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α do długości przeciwprostokątnej.
- Tangensem kąta ostrego α (w skrócie tgα) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α.



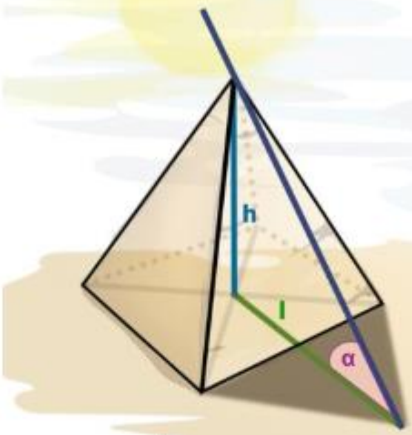
Korzystając z oznaczeń na rysunku, zapisujemy

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Powyższe zależności nazywa się funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego α.

Przykład 1

Jak wyznaczyć wysokość piramidy Cheopsa?



$$\frac{h}{l} = \text{tg}\,\alpha$$

$$\frac{h}{404} = \text{tg}\,19^{o}$$

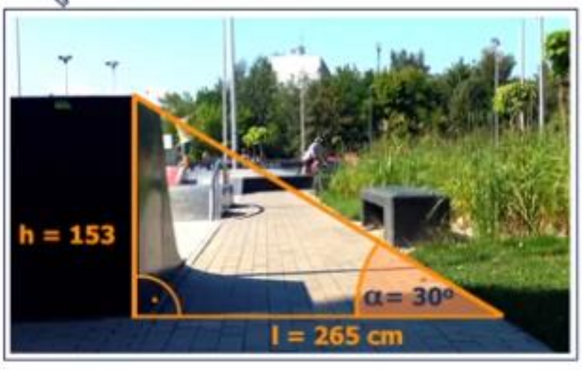
$$h \approx 404 \cdot 0{,}3443$$

$$h \approx 139 \text{ m}$$

α[°]	sin α / cos ß	tg α / ctg ß	ß[°]
15	0.2588	0.2679	75
16	0.2756	0.2867	74
17	0.2924	0.3057	73
18	0.3090	0.3249	72
19	0.3256	0.3443	71
20	0.3420	0.3640	70

Wysokość piramidy Cheopsa w rzeczywistości wynosi około 146 m.

Jak wyznaczyć wysokość rampy?



szerokość chodnika - 265 cm

$$\frac{h}{l} = \text{tg}\alpha$$

$$\alpha = 30^{o}$$

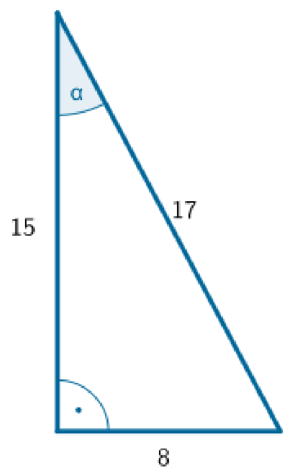
$$h = l \cdot \text{tg}\alpha$$

$$h = 265 \cdot 0{,}5774 \approx 153$$

Wysokość rampy jest równa około 153 cm.

Przykład 2

Trójkąt na rysunku jest prostokątny.



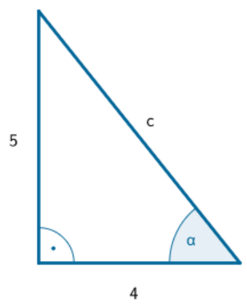
Dla tego trójkąta zachodzą następujące związki trygonometryczne:

$$\sin\alpha = \frac{8}{17},\ \cos\alpha = \frac{15}{17},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{8}{15}$$

Przykład 3

W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α, przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta ma długość 5, a druga przyprostokątna ma długość 4.

Przedstawmy to na rysunku



Zatem:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{4}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przeciwprostokątnej c tego trójkąta

$$c^2 = 4^2 + 5^2.$$

Ponieważ $c > 0$, stąd

$$\mathrm{c} = \sqrt{41}.$$

Zatem

$$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}\ ,\ \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}},$$

Po usunięciu niewymierności z mianownika mamy:

$$\sin\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}\ ,\ \cos\alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}.$$

Ćwiczenie 1

Na rysunku zaznaczono długości boków trójkąta prostokątnego. Jeden z kątów ostrych tego trójkąta ma miarę α.

Rysunek trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 5 i 12 oraz przeciwprostokątnej długości 13. Kąt ostry alfa leży naprzeciw krótszej przyprostokątnej.

Wówczas

- ☐ $\sin\alpha = \frac{5}{13}$
- ☐ $\mathrm{tg}\alpha > 1$
- ☐ $13\cos\alpha = 12$

Ćwiczenie 2

Na rysunku podano długości boków i zaznaczono kąt ostry α trójkąta prostokątnego.

Rysunek trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 8 i 15 oraz przeciwprostokątnej długości 17. Kąt ostry alfa leży naprzeciw krótszej przyprostokątnej.

Wtedy

- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{15}{17}$
- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{8}{17}$
- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{15}{8}$
- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{8}{15}$

Ćwiczenie 3

Na rysunku podane są długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, którego jeden z kątów ostrych jest równy α.

Rysunek trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 5 i dwa pierwiastki z pięciu. Kąt ostry alfa leży naprzeciw przyprostokątnej długości dwa pierwiastki z pięciu.

Wówczas

- $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$
- $\sin\alpha = \frac{2}{3}$
- $\sin\alpha = \frac{3}{2\sqrt{5}}$
- $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$